INI
PENROSE

HORIZON THRESHOLD PROJECT

Progi krzywizny Plancka i granice opisu geometrycznego

we wnętrzach regularnych czarnych dziur

Raport techniczny

na podstawie pracy: "Planck-Curvature Thresholds and the Limits of Geometric Description in Regular Black Hole Interiors"

Katarzyna Anna Paruzel | Michał Izaak Paruzel

Sir Roger Penrose Institute for Interdisciplinary Sciences

2026

Streszczenie wykonawcze

Raport przedstawia wyniki analizy znanej wykładniczej metryki regularnej czarnej dziury, w której skala przejścia do regularnego wnętrza nie jest przyjmowana arbitralnie, lecz wyznaczana bezpośrednio z niezmienniczej krzywizny zewnętrznej geometrii Schwarzschilda.

Najważniejszy rezultat polega na wykazaniu, że odpowiednie powiązanie promienia przejścia z masą obiektu prowadzi do globalnego ograniczenia skalara Kretschmanna niezależnego od masy asymptotycznej. Oznacza to, że wzrost masy powiększa rozmiar regionu przejściowego, ale nie zwiększa maksymalnej krzywizny regularnego rdzenia.

WYNIK GŁÓWNY

Zewnętrzna geometria Schwarzschilda zawiera wystarczającą informację niezmienniczą, aby wyznaczyć skalę przejścia, a ta sama relacja skalowa prowadzi do globalnego ograniczenia krzywizny $K(r) \leq K(0) = 2\eta K_p$.

SKALA PRZEJŚCIA	GLOBALNY KRES	REŻIMY
$r_c \propto M^{1/3}$	**$K(r) \leq 2\eta K_p$**	**2 horyzonty / 1 / 0**
HORYZONT WEWNĘTRZNY	GRANICA DUŻYCH MAS	WARUNKI ENERGETYCZNE
$\kappa_- > 0$ poza ekstremalnością	**$r_- \sim \ell_p$**	**NEC i WEC spełnione**

1. Kontekst naukowy

Klasyczne rozwiązanie Schwarzschilda opisuje zewnętrzną geometrię statycznej, sferycznie symetrycznej masy. Jego formalna kontynuacja do centrum prowadzi jednak do rozbieżności niezmienników krzywizny. W tej pracy rozbieżność traktowana jest jako sygnał granicy stosowalności niezmienionego opisu klasycznego, a nie jako pełny opis fizyczny najgłębszego wnętrza.

$$K_{Sch}(r) = 12\, r_s^2 / r^6 \quad (1)$$

Modele regularnych czarnych dziur zastępują osobliwość rdzeniem o skończonej krzywiźnie. Typowym warunkiem regularności jest zachowanie funkcji masy $m(r) \sim r^3$ w pobliżu centrum. Nierozwiązanym problemem pozostaje jednak sposób wyznaczenia skali, przy której klasyczna geometria powinna zostać zastąpiona opisem efektywnym.

2. Wyznaczenie skali przejścia z geometrii zewnętrznej

Promień przejścia r_c definiuje się jako punkt, w którym skalar Kretschmanna niezmienionej geometrii Schwarzschilda osiąga wybrany próg krzywizny. Przyjęta konwencja $K_p = \ell_p^{-4}$ stanowi referencyjną skalę krzywizny Plancka, natomiast dodatni parametr η określa jej wybraną normalizację.

$$K\_Sch(r\_c) = \eta\, K_p \quad (2)$$

$$r\_c^3 = \sqrt{(12/\eta)} \cdot r\_s\, \ell_p^2 \quad (3)$$

Ponieważ promień Schwarzschilda jest proporcjonalny do masy, otrzymuje się skalowanie $r\_c \propto M^{1/3}$. Dla obiektów makroskopowych prowadzi to do hierarchii $\ell_p \lll r\_c \lll r\_s$. Próg krzywizny Plancka może więc zostać osiągnięty w promieniu znacznie większym niż sama długość Plancka, choć nadal głęboko pod horyzontem zewnętrznym.

$$x(r) = r^3/r\_c^3 = \sqrt{[\eta K_p / K\_Sch(r)]} \quad (4)$$

Zmienna x ma bezpośrednią interpretację geometryczną: $x \ggg 1$ odpowiada obszarowi niskiej krzywizny, x = 1 wyznacza środek regionu przejściowego, a $x \lll 1$ oznacza domenę, w której niezmieniona kontynuacja Schwarzschilda wymagałaby krzywizny przekraczającej przyjęty próg.

3. Wykładnicza metryka regularna

Analiza wykorzystuje znany wykładniczy profil masy. Nowością nie jest sama metryka, lecz sposób wyznaczenia jej skali przejścia z geometrii zewnętrznej.

$$m(r) = M\,[1 - \exp(-r^3/r\_c^3)] = M\,P(x) \quad (5)$$

$$P(x) = 1 - e^{-x} \quad (6)$$

W pobliżu centrum profil zachowuje się jak P(x) ~ x, co daje $m(r) \sim r^3$ i prowadzi do regularnego rdzenia typu de Sittera. W obszarze zewnętrznym poprawki do geometrii Schwarzschilda zanikają wykładniczo.

Maksimum logarytmicznej szybkości zmiany profilu występuje przy x = 1. Jest to ten sam punkt, który został wyznaczony przez warunek progowy krzywizny. Zbieżność ta wynika z użycia wspólnej zmiennej x i stanowi wewnętrzną spójność parametryzacji, a nie niezależne wyprowadzenie profilu wykładniczego.

4. Globalne ograniczenie krzywizny

Po zastosowaniu relacji r_c(M) skalar Kretschmanna faktoryzuje się na współczynnik wymiarowy oraz uniwersalny profil bezwymiarowy. Zależność od masy zostaje całkowicie przeniesiona do skali radialnej.

$$K(r) = (r\_s^2/r\_c^6) \cdot \mathscr{K}(x) \quad (7)$$

Ścisłą monotoniczność profilu $\mathscr{K}(x)$ wykazano metodą łączącą trzy niezależne elementy: dokładne oszacowanie szeregowe przy początku, arytmetykę przedziałową na domenie zwartej oraz analizę asymptotyczną dla dużych x.

1. Dokładne wymierne oszacowanie Taylora dla $0 < x \leq 0{,}1$.
2. Arytmetyka przedziałowa z zaokrągleniem na zewnątrz dla $0{,}1 \leq x \leq 6$.
3. Analityczne oszacowanie dodatniości dla $x \geq 6$.

GLOBALNY KRES KRZYWIZNY

Profil krzywizny jest ściśle malejący od centrum na zewnątrz. W całej geometrii zachodzi $K(r) \leq K(0) = 2\eta K_p$, a równość występuje wyłącznie w regularnym centrum.

Wynik jest silniejszy niż sama skończoność krzywizny centralnej: wyklucza większe maksimum poza centrum. Dla ustalonego η górna granica nie zależy od masy. Wzrost masy zwiększa rozmiar regionu przejściowego, lecz nie zwiększa maksymalnej krzywizny.

5. Reżimy masowe i struktura horyzontów

Liczba horyzontów zależy od bezwymiarowego parametru λ = r_s/r_c. Analiza globalnego minimum funkcji horyzontowej prowadzi do dokładnej klasyfikacji trzech reżimów.

Reżim	Warunek	Struktura
Nadkrytyczny	M > M_min	horyzont zewnętrzny r_+ i wewnętrzny r_-
Krytyczny	M = M_min	jeden horyzont zdegenerowany
Podkrytyczny	M < M_min	geometria regularna bez horyzontu

Dla referencyjnej konwencji η = 1 otrzymuje się M_min ≈ 1,635621 M_p. Konfiguracja krytyczna nie jest automatycznie stabilną pozostałością; jest statycznym rozwiązaniem zdegenerowanym, którego stabilność wymaga osobnej analizy perturbacyjnej i dynamicznej.

6. Horyzont wewnętrzny i grawitacja powierzchniowa

Promień przejścia r_c i horyzont wewnętrzny r_- są wyznaczane przez różne warunki. Dla większości mas nadkrytycznych horyzont wewnętrzny leży wewnątrz regionu przejściowego, natomiast w wąskim zakresie bliskim konfiguracji krytycznej przesuwa się na zewnętrzną stronę punktu x = 1.

Dla każdej nieekstremalnej konfiguracji dwuhoryzontowej grawitacja powierzchniowa horyzontu wewnętrznego jest dodatnia. Rośnie monotonicznie z masą, zanika w granicy ekstremalnej i dla dużych mas dąży do skończonej wartości skali Plancka.

$$0 < \kappa_-(M) < (\eta/12)^{1/4} \cdot c^2/\ell_p \quad (8)$$

Niezerowa κ_- oznacza obecność kinematycznego czynnika związanego ze standardowym mechanizmem blueshiftu na horyzoncie Cauchy'ego. Sam wynik nie stanowi pełnego dowodu inflacji masy, ponieważ wymagałoby to czasozależnych perturbacji i ich sprzężenia zwrotnego.

Dla dużych mas promień wewnętrzny dąży do wartości rzędu długości Plancka. W pracy wykazano, że ten charakter nie jest szczególną własnością wyłącznie profilu wykładniczego, lecz wynika szerzej z regularnego zachowania $P(x) = ax + O(x^2)$ oraz ze skali $r_c^3 \propto r_s \ell_p^2$.

7. Efektywny tensor energii-pędu

Efektywny tensor energii-pędu jest definiowany przez tensor Einsteina regularnej geometrii. Nie musi odpowiadać konwencjonalnemu płynowi materialnemu; może reprezentować uśrednione poprawki grawitacyjne lub semiklasyczne.

$$\varepsilon(x) = \varepsilon_0 e^{-x}, \quad p\_r = -\varepsilon, \quad p\_t = -\varepsilon(1 - 3x/2) \quad (9)$$

Warunek	Wynik	Zakres / znaczenie
NEC	spełniony	radialnie nasycony, tangencjalnie dodatni
WEC	spełniony	gęstość energii nieujemna
SEC	naruszony	centralny region de Sittera: x < 2/3
DEC	częściowo naruszony	tangencjalny ogon dla x > 4/3; nadwyżka jest ograniczona i zanika asymptotycznie

Naruszenie silnego warunku energetycznego w rdzeniu jest zgodne z ujemnym ciśnieniem geometrii typu de Sittera. Naruszenie dominującego warunku energetycznego zostało ilościowo ograniczone: osiąga skończone maksimum i zanika przy dużych x.

8. Znaczenie fizyczne i granice interpretacji

Model pokazuje, że krzywizna zewnętrzna może wyznaczyć skalę, przy której niezmieniona kontynuacja Schwarzschilda osiąga ustalony próg. Regularna metryka stanowi następnie efektywną kontynuację o globalnie ograniczonej krzywiźnie.

INTERPRETACJA OSTROŻNA

Skończona krzywizna statycznego tła nie gwarantuje stabilności dynamicznej horyzontu wewnętrznego. Położenie horyzontu względem regionu przejścia klasyfikuje geometrię, ale nie ustanawia nowego mechanizmu niestabilności.

Praca nie wyprowadza profilu wykładniczego z fundamentalnego działania, nie rozwiązuje dynamicznego kolapsu ani parowania i nie dowodzi stabilności konfiguracji krytycznej. Nie rozstrzyga również problemu informacji czarnej dziury.

Jej wynik jest bardziej ograniczony, lecz precyzyjny: zewnętrzna geometria klasyczna dostarcza niezmienniczego kryterium wyznaczenia skali przejścia, a przyjęta regularna kontynuacja pozwala wykazać globalny, masowo niezależny kres krzywizny.

9. Kierunki dalszych badań

- porównanie profilu wykładniczego z profilem Haywarda przy tej samej procedurze progowej;
- pełna analiza zupełności geodezyjnej i maksymalnego przedłużenia;
- równania perturbacji i dynamiczna stabilność horyzontu wewnętrznego;
- semiklasyczny tensor energii-pędu i sprzężenie zwrotne w pobliżu horyzontów;
- uogólnienie progu krzywizny na obracające się geometrie typu Kerra.

10. Wniosek końcowy

SEKWENCJA WYNIKÓW

krzywizna zewnętrzna Schwarzschilda → skala przejścia $r_c(M)$ → regularne wnętrze o globalnie ograniczonej krzywiźnie

Najważniejsza konsekwencja polega na rozdzieleniu dwóch skal: makroskopowego promienia przejścia, który rośnie jak $M^{1/3}$, oraz maksymalnej krzywizny rdzenia, która dla ustalonego η pozostaje niezależna od masy. Wynik tworzy kontrolowany pomost między klasyczną geometrią zewnętrzną a fenomenologicznym opisem regularnego wnętrza, bez przypisywania obecnemu modelowi statusu kompletnej teorii mikroskopowej.